**2.1 函数** 2021年7月20日14点48分

2.1.1定义. 令S和T是集合.从S到T的**函数**是的子集F使得对于每一个元素,恰好存在一个元素使得.集合S被称为函数的**定义域[domain]**,集合T被称为函数的**值域[codomain]**.值域的子集

被称为函数的**图像**.

2.1.2定义. 令和是函数. 则f和g的**复合[composite]**是从S到U的函数,定义为,其中为任意值.

2.1.3命题. 函数的复合是可结合的.

2.1.4定义. 令是一个函数.

如果对于每一个总是存在一个元素使得,则被称为满射[onto, surjective].

如果意味着对所有的成立,则f被称为单射[one-to-one, injective].

如果f既是单射又是满射,则f被称为从S到T的双射[one-to-one correspondence, bijection].

2.1.5命题. 令和是函数.

如果和是单射,则是单射.

如果和是满射,则是满射.

2.1.6定义. 令S,T是集合.恒等函数定义为公式对所有成立.令和是函数,如果且,则称为的**逆**.

2.1.7命题. 令是一个函数.如果f有一个逆,则它必须是双射.反过来,如果f是双射,则它有一个逆函数.

2.1.8命题. 令是一个函数,并且假设S和T是元素数量相同的有限集合.如果f是单射或满射,则f是双射.

2.2 等价关系 2021年7月20日16点46分

2.2.1定义. 令S是一个集合.令R是的子集,如果

1. 对所有成立;
2. 如果则对所有成立;
3. 如果和,则对所有成立;

则R被称为S上的**等价关系[equivalence relation]**.我们写作来标记.

2.2.2定义. 令是集合S上的一个等价关系.对于给定元素,我们定义的**等价类**为S中所有与a是等价的元素的集合.我们使用符号.即

符号用于表示通过等价关系定义的S的等价类的集合族.我们说是关系的**因素集[factor set]**.

2.2.3命题. 令S是一个集合,令是S上的等价关系.则S中的每一个元素恰好属于由关系确定的S中的等价类中的某一个.

2.2.4定义. 令S是一个集合.令是S的非空子集族,如果S的每一个元素恰好属于的某一个成员,则被称为S的一个**分割[partition]**.

2.2.5命题. 集合S的任意分割确定了S上的唯一等价关系使得是因素集.反过来,如果是S上的任意等价关系,则因素集是S的一个分割并确定了等价关系.

2.2.6定义. 令S是一个集合,并且令是S上的一个等价关系.函数定义为,对所有成立,被称为从S满射到因素集的**自然投影[natural projection]**.

2.2.7定理.如果是任意函数,是定义在S上的等价关系:如果则,对所有成立.则S在f下的图像f(s)中的元素与关系决定的因素集中的等价类存在一一对应关系.

2.2.8定义. 令是一个函数,如果,则集合

被称为在下的**逆图像**.

**2.3 排列** 2021年6月30日16点46分

**2.3.1定义**. 令是一个集合.如果函数是双射,则该函数被称为的一个**排列[permutation]**.

集合的所有排列集合记为.

集合的所有排列集合被记为.

命题2.1.5表明中两个排列的复合又是一个排列.根据命题2.1.3,排列组合是结合的.很明显,S上的恒等函数是双射.命题2.1.7表明中的任何排列都有一个反函数,它也是双射.我们可以将这些重要的属性总结如下:

1. 如果,则;
2. ;
3. 如果,则.

**2.3.2定义**. 令是一个集合,.如果存在元素使得,,,,,以及对于所有其它元素,并且对于成立,则被称为**长度为**的**循环**.在这种情况下我们写.

**2.3.3定义**. 令和是中的循环.如果对所有成立,则和被称为是**不相交的[disjoint]**.

**2.3.4命题**. 令S是任意集合.如果和在中是不相交的,则.

**2.3.5定理**. 中的每个排列都可以写成不相交循环的乘积.乘积中出现的长度的循环是唯一的.(**证明过程需看懂**)

**2.3.6定义**. 令.使得的最小正整数被称为的**阶**.

**2.3.7命题**. 令具有阶.则对所有的整数我们有当且仅当.

**2.3.8命题**. 令可以被写成不相交循环的乘积.则的阶是这些循环长度的最小公倍数.

**2.3.9定义**. 长度为2的循环被称为**换位[transposition]**.

**2.3.10命题**. 中的任意排列都可以被称为换位的乘积,其中.

**2.3.11定理**. 如果一个排列以两种方式写成换位的乘积,那么在两种情况下,换位的数量要么都是偶数,要么都是奇数.(**证明过程需看懂**)

**2.3.12定义**. 如果一个排列可以写成偶数个换位的乘积,那么它被称为偶排列,否则被称为奇排列.