**2.1 函数** 2021年7月20日14点48分

**2.1.1定义**. 令和是集合.从到的**函数**是的子集F使得对于每一个元素,恰好存在一个元素使得.集合S被称为函数的**定义域[domain]**,集合T被称为函数的**值域[codomain]**.值域的子集

被称为函数的**图像**.

2.1.2定义. 令和是函数. 则f和g的**复合[composite]**是从S到U的函数,定义为,其中为任意值.

2.1.3命题. 函数的复合是可结合的.

2.1.4定义. 令是一个函数.

如果对于每一个总是存在一个元素使得,则被称为满射[onto, surjective].

如果意味着对所有的成立,则f被称为单射[one-to-one, injective].

如果f既是单射又是满射,则f被称为从S到T的双射[one-to-one correspondence, bijection].

2.1.5命题. 令和是函数.

如果和是单射,则是单射.

如果和是满射,则是满射.

2.1.6定义. 令S,T是集合.恒等函数定义为公式对所有成立.令和是函数,如果且,则称为的**逆**.

2.1.7命题. 令是一个函数.如果f有一个逆,则它必须是双射.反过来,如果f是双射,则它有一个逆函数.

2.1.8命题. 令是一个函数,并且假设S和T是元素数量相同的有限集合.如果f是单射或满射,则f是双射.

**2.2 等价关系** 2021年7月20日16点46分——2021年8月17日11点54分

**2.2.1定义**. 令是一个集合.令R是的子集,如果

1. 对所有成立;
2. 如果则对所有成立;
3. 如果和,则对所有成立;

则被称为S上的**等价关系[equivalence relation]**.我们写作来标记.

**2.2.2定义**. 令是集合S上的一个等价关系.对于给定元素,我们定义的**等价类**为S中所有与是等价的元素的集合.我们使用符号.即

符号用于表示通过等价关系定义的S的等价类的集合族.我们说是关系的**因素集[factor set]**.

**实际上是一个集合族,对于其中的每一个集合,中的所有元素满足等价关系**.**对于不同于集合的集合,的元素与的元素一定不满足等价关系**.

**2.2.3命题**. 令是一个集合,令是上的等价关系.则中的每一个元素恰好属于由关系确定的中的等价类中的某一个.

**2.2.4定义**. 令是一个集合.令是的非空子集族,如果的每一个元素恰好属于的某一集合,则被称为的一个**分割[partition]**.

**2.2.5命题**. 集合的任意分割确定了上的唯一等价关系使得是因素集.反过来,如果是上的任意等价关系,则因素集是S的一个分割并确定了等价关系.

**2.2.6定义**. 令是一个集合,并且令是上的一个等价关系.函数定义为,对所有成立,被称为从满射到因素集的**自然投影[natural projection]**.

**2.2.7定理**.如果是任意函数,是定义在上的等价关系:如果则,对所有成立.则在下的图像中的元素与关系决定的因素集中的等价类存在一一对应关系.

2.2.8定义. 令是一个函数,如果,则集合

被称为在下的**逆图像**.

**2.3 排列** 2021年6月30日16点46分

**2.3.1定义**. 令是一个集合.如果函数是双射,则该函数被称为的一个**排列[permutation]**.

集合的所有排列集合记为.

集合的所有排列集合被记为.

命题2.1.5表明中两个排列的复合又是一个排列.根据命题2.1.3,排列组合是结合的.很明显,S上的恒等函数是双射.命题2.1.7表明中的任何排列都有一个反函数,它也是双射.我们可以将这些重要的属性总结如下:

1. 如果,则;
2. ;
3. 如果,则.

**2.3.2定义**. 令是一个集合,.如果存在元素使得,,,,,以及对于所有其它元素,并且对于成立,则被称为**长度为**的**循环**.在这种情况下我们写.

**2.3.3定义**. 令和是中的循环.如果对所有成立,则和被称为是**不相交的[disjoint]**.

**2.3.4命题**. 令S是任意集合.如果和在中是不相交的,则.

**2.3.5定理**. 中的每个排列都可以写成不相交循环的乘积.乘积中出现的长度的循环是唯一的.(**证明过程需看懂**)

**2.3.6定义**. 令.使得的最小正整数被称为的**阶**.

**2.3.7命题**. 令具有阶.则对所有的整数我们有当且仅当.

**2.3.8命题**. 令可以被写成不相交循环的乘积.则的阶是这些循环长度的最小公倍数.

**2.3.9定义**. 长度为2的循环被称为**换位[transposition]**.

**2.3.10命题**. 中的任意排列都可以被称为换位的乘积,其中.

**2.3.11定理**. 如果一个排列以两种方式写成换位的乘积,那么在两种情况下,换位的数量要么都是偶数,要么都是奇数.(**证明过程需看懂**)

**2.3.12定义**. 如果一个排列可以写成偶数个换位的乘积,那么它被称为偶排列,否则被称为奇排列.